

**“UN MODELO DEL USO DE LA TECNOLOGÍA
PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO
DIFERENCIAL APLICADO A LA
ADMINISTRACIÓN Y LA ECONOMÍA.
CASO: UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO DE RIO PIEDRAS”**



Edwin Rivera Rivera, Universidad de Puerto Rico*

**A model of the use of technology for the teaching of differential calculus
applied to the administration and the economy.
Case: University of Puerto Rico Precinct of Rio Piedras.**

edwin.rivera20@upr.edu

RESUMEN

*El objetivo general de la investigación es “Desarrollar un modelo eficiente con el uso de la tecnología para la enseñanza del cálculo diferencial aplicado a la administración y la economía, en la Universidad de Puerto Rico, recinto Rio Piedras”. El investigador creó un modelo con el uso de la tecnología en la enseñanza de dicha materia para lograr entender los procesos del nuevo lenguaje matemático. La investigación es descriptiva, cualitativa y experimental. Se utilizaron métodos tecnológicos como: symbolab, wolfram, geogebra, geómetra, matlab, latex, graphmath, calculadora y computadora para que el estudiante entienda los conceptos generales de forma abstracta y lo pueda llevar al entendimiento concreto. Las pruebas se aplicaron a una población de 30 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial. Se muestra la manera en que el estudiante puede resolver lo ejercicios aplicados a la economía y la administración utilizando los graficadores. Se presentó el lenguaje más aplicado a dicha materia como lo es: el límite, la derivada, los máximos y mínimos, la diferenciación y sus variadas técnicas. El modelo permitirá también unos nuevos procesos de aplicaciones del cálculo diferencial al mundo económico mejorando la formación de nuevos maestros de matemáticas y nuevos estudiantes que *actualmente estén estudiando la materia del cálculo diferencial*.*

Palabras Clave: tecnología, cálculo diferencial, modelo.

*Dr. Edwin Rivera Rivera, estudiante del Post-doctoral Program in Mathematics, TECANA AMERICAN UNIVERSITY (TAU), of the USA.

ABSTRACT

In this research on: A model of the use of technology for the teaching of differential calculus applied to administration and economics, the researcher will create a model with the use of technology in teaching that subject to understand the processes of the new Mathematical Language. It will present the language most applied to this subject as it is: the limit, the derivative, the maximum and minimum, the differentiation and its various techniques. In this language will apply new teaching techniques, which will help teachers and students to deal with a greater understanding of it. Applications will be used to the economy and business administration with the use of technology. The study will also bring new processes of differential calculus applications to the economic world by improving the training of new mathematics teachers and new students who are currently studying the subject of differential calculus.

KEYWORDS: technology, differential calculus, model.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo diferencial ha sido una de las materias que siempre les ha causado un cierto grado de dificultad al estudiantado. Más aun cuando esta materia es una de las principales para aquellos estudiantes que están encaminados al área de las ciencias, ingeniería, negocios, administración y la economía. En muchas ocasiones el no estar preparados en esta materia es la causa de los fracasos posteriores en otras materias. Señala Catsigeras Curione y Miguez (2006) que una de las razones de la dificultad para el aprendizaje de algunos conceptos del Cálculo se encuentra en la característica abstracta intrínseca de dichos temas que, aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos elaborados que en apariencia quedan desconectados de las vivencias cotidianas. La formalización de los conceptos del cálculo infinitesimal, diferencial e integral llevó centenas de años a la humanidad, y fue desde el punto de vista de la epistemología genética piagetiana, producto de estadios sucesivos de construcción del conocimiento, que implicaron reorganizaciones a otro nivel de las adquisiciones precedentes. Por tal razón cada estudiante que comienza a estudiar

el cálculo diferencial se encuentra con una serie de conceptos muy abstractos que no puede aplicarlos a su área de especialidad, pues no logra entender ni analizar lo que realmente estos conceptos implican y como se aplican a su profesión. Plantean Arlego y Costa (2011) que numerosos trabajos de investigación abordan estas problemáticas mencionadas proponiendo diversas estrategias didácticas, con diversos objetivos, algunos de ellos, el de propiciar aprendizajes significativos (Ausubel et al, 1990). Se entiende por estrategias didácticas, a las estrategias de enseñanza que concretan una serie de actividades de aprendizaje dirigidas a los estudiantes y adaptadas a sus características, a los recursos disponibles y a los contenidos objeto de estudio, con el objetivo de favorecer la comprensión de los conceptos, su clasificación y relación, la reflexión, el ejercicio de formas de razonamiento y la transferencia de conocimientos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza del cálculo diferencial ha sido una de las materias que siempre les ha causado un cierto grado de dificultad al estudiantado. Más aun cuando esta materia es una de las principales para aquellos estudiantes que están encaminados al área de las ciencias, ingeniería, negocios, administración y la economía. En muchas ocasiones el no estar preparados en esta materia es la causa de los fracasos posteriores en otras materias. Señala Catsigeras Curione y Miguez (2006) que una de las razones de la dificultad para el aprendizaje de algunos conceptos del Cálculo se encuentra en la característica abstracta intrínseca de dichos temas que, aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos elaborados que en apariencia quedan desconectados de las vivencias cotidianas. La formalización de los conceptos del cálculo infinitesimal, diferencial e integral llevó centenas de años a la humanidad, y fue desde el punto de vista de la epistemología genética piagetiana, producto de estadios sucesivos de construcción del conocimiento, que implicaron reorganizaciones a otro nivel de las adquisiciones precedentes. Por tal razón cada estudiante que comienza a estudiar el cálculo diferencial se encuentra con una serie de conceptos muy abstractos que

no puede aplicarlos a su área de especialidad, pues no logra entender ni analizar lo que realmente estos conceptos implican y como se aplican a su profesión. Plantean Arlego y Costa (2011) que numerosos trabajos de investigación abordan estas problemáticas mencionadas proponiendo diversas estrategias didácticas, con diversos objetivos, algunos de ellos, el de propiciar aprendizajes significativos (Ausubel et al, 1990). Se entiende por estrategias didácticas, a las estrategias de enseñanza que concretan una serie de actividades de aprendizaje dirigidas a los estudiantes y adaptadas a sus características, a los recursos disponibles y a los contenidos objeto de estudio, con el objetivo de favorecer la comprensión de los conceptos, su clasificación y relación, la reflexión, el ejercicio de formas de razonamiento y la transferencia de conocimientos. Varias investigaciones dan cuenta de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo en la universidad. Señalan que estas dificultades son de diferente naturaleza.

Cuando un profesor usa la estrategia pedagógica de la resolución de problemas verbales para que el estudiante pueda ver la aplicación del cálculo a métodos de la administración y la economía al estudiante se le hace muy difícil poder aplicarlos pues no ha entendido el proceso de significado que tiene cada una de las áreas importantes en el cálculo diferencial. Ejemplo de ellos es entender el concepto del límite ($\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$), la derivada ($\frac{dy}{dx}$), los máximos y mínimos ($\min_{x \rightarrow \infty} F(x)$) ($\max_{x \rightarrow \infty} F(x)$) y la integración o antiderivación ($\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$). Cada uno de estos conceptos es un nuevo lenguaje para el alumno lo cual implica que su capacidad cognitiva se tiene que elevar a un nivel mucho más abstracto que el acostumbrado en niveles más bajos en las matemáticas. Una vez entendido el nuevo lenguaje se tiene que crear un dominio de la algoritmización o la parte computacional para luego poder aplicarlo a los problemas planteados. De igual manera, la era tecnológica ha ido creciendo a pasos agigantados lo cual implica que no es solamente poder computar con los algoritmos también la aplicación con la tecnología es una de las ramas que el aprendiz se irá enfrentando en toda su carrera profesional. Concuerda Moreno (2002) que la tecnología estará arrojando los altos niveles de la enseñanza y más aún el mercado financiero y económico y

que los estudiantes no están haciendo uso de los medios tecnológicos con los cuales se enfrentarán más adelante en el mundo corporativo. Asimismo, David Tall et. al (2001) comentan que, de todas las áreas de Matemáticas, el área de Cálculo es la que ha recibido el mayor interés e inversión en el uso de la tecnología. El uso de nuevas tecnologías demuestra la posibilidad de fundamentar los conceptos de derivada e integral o facilitarlos. Lo anterior a través de varios “ambientes” tales como el numérico, el gráfico y el simbólico, hasta llegar de manera progresiva a la conceptualización de una definición abstracta, pasando por actividades que permitan la exploración y prueba de conjeturas con el uso de estos conceptos. Por tal razón cobra una gran importancia el uso de tecnologías para la prueba de los grandes teoremas en el cálculo diferencial y de esta manera una vez el estudiante vaya profundizando en el entendido matemático es que podrá aplicarlo a los problemas que conllevan un razonamiento y análisis profundo. Recalca Concepción (2008) que el uso de la tecnología en la enseñanza del cálculo diferencial es lo que hará la diferencia entre aquel estudiante que solo podrá resolver problemas de algoritmos y aquel que con su aplicación este en una gran competencia en el mundo profesional.

Por lo antes expuesto se presenta el siguiente problema de investigación:
¿Cómo desarrollar un modelo eficiente con el uso de la tecnología para la enseñanza del cálculo diferencial aplicado a la administración y la economía en la Universidad de Puerto Rico, Recinto Rio Piedras?

Objetivo General

“Desarrollar un modelo eficiente con el uso de la tecnología para la enseñanza del cálculo diferencial aplicado a la administración y la economía en la Universidad de Puerto Rico, Recinto Rio Piedras.

REVISIÓN TEÓRICA DE LA LITERATURA

Dado que la enseñanza del cálculo diferencial es una de las áreas en las matemáticas que gran interés ha causado entre los educadores de esta materia y que de igual modo sus aplicaciones como herramienta de ayuda para la comprensión y entendimiento de la misma. Abarca (2001) realizó un estudio con estudiantes que tomaban el curso de cálculo 1 una la universidad de Bolivia. En este estudio se les planteo una nueva metodología de la enseñanza con el uso de problemas verbales utilizando la metodología de Pólya y Shoenfel haciendo una combinación en los dos métodos, creando un sistema de plantear los problemas verbales a la misma vez que se enseñaban los conceptos importantes del cálculo. El estudio reveló que en la medida que los estudiantes realizaban los procesos analíticos de resolver los problemas verbales y aplicaban los temas con el propósito obligatorio de tener que aplicar la teoría de Pólya esto le ayudaba a entender el cálculo diferencial y sus variantes. Se concluyó por la autora que el exponer al estudiante a métodos de aplicaciones crea en el estudiante un sistema que lo obliga a entender los conceptos importantes de la materia.

De igual modo, Ruiz y Carreto (2012) realizaron un estudio donde crearon un nuevo sistema tecnológico para la resolución de problemas en el cálculo aplicado a estudiantes de escuela superior en México. En este estudio se les entregó una serie de problemas verbales a los estudiantes es los cuales tenía que resolver con el uso de un nuevo software el cual le ayudaría en todo el proceso. El estudio demostró que los estudiantes aprendían mucho mejor el cálculo con el uso de la tecnología.

Asimismo, Dolores (2000) realizó un estudio con estudiantes universitarios a los cuales se les enseñaba un nuevo método de calcular la derivada en el cálculo diferencial. Los estudiantes iban diseñando nuevos métodos con una serie de preguntas que la profesora les realizaba y con el método del descubrimiento y con la matemática con sentido lograron aprender a derivar las funciones dadas en el cálculo.

También Ruiz (2010), Catsigeras (2004), Sabogal, Monroy, Landero, Molina (2013), Azcareta y Camacho (2003), Badillo (2003), Blázquez (2000), Calvo (2001), Camarena (2013), Depool (2001), Cuevas y Pluvinage (2015), Rojas (2001) en sus estudios encontraron que la tecnología ayudaba a los estudiantes a entender los conceptos abstractos de las matemáticas en especial el cálculo diferencial.

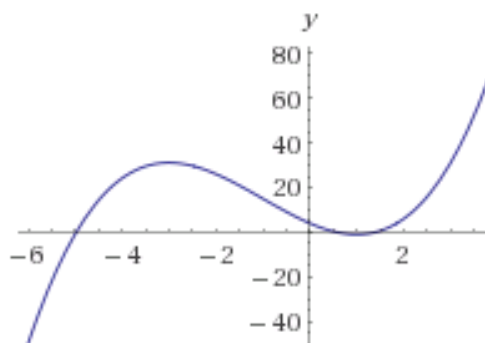
METODOLOGÍA

La siguiente investigación es descriptiva, cualitativa y experimental en la cual se creará un modelo de enseñanza del cálculo diferencial aplicado a la administración y la economía. En el mismo se utilizarán métodos tecnológicos como: symbolab, wolfram, geogebra, geómetra, matlab, latex, graphmath, calculadora y computadora para que el estudiante entienda los conceptos generales de forma abstracta y lo pueda llevar al entendimiento concreto. Para efectos del estudio se utilizará la población de 30 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial aplicado a la administración. En dicho estudio se comenzará evaluando al estudiante con diferentes pruebas. La primera prueba consta de 20 ejercicios en los cuales el estudiante tiene que utilizar tecnología aplicada al cálculo diferencial para resolverlos. Las pruebas cortas están diseñadas con cinco ejercicios de aplicación sobre la administración y la economía los cuales serán resueltos con el uso de la tecnología. Los exámenes serán ejercicios de la clase de cálculo diferencial. Las calculadoras que se utilizarán será la Texas Instrument 84 (TI 84) o cualquier otra con la modalidad gráfica. Los datos de la investigación serán analizados con estadística descriptiva, serán presentados en gráficas y tablas de frecuencias. De igual forma la secuencia de progreso será graficado y mostrado en modelos estructurales que servirán de ilustración para ser utilizados por los lectores u otros investigadores. Se mostrará la manera en que el estudiante puede resolver lo ejercicios aplicados a la economía y la administración utilizando los graficadores.

Ejemplo 1: La ecuación Ganancia en una compañía está dada por la ecuación:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ Hallar los intervalos de ganancia máxima y mínima de la siguiente. En este caso es mucho más fácil usar un graficador.

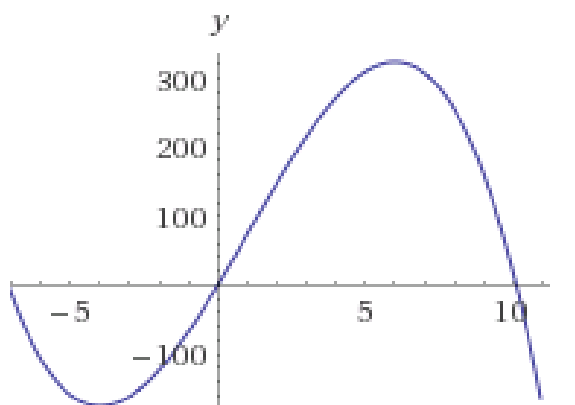
gráfica 1: se realiza la gráfica para hallar la ganancia máxima o mínima usando el graficador Wolfram.



La siguiente gráfica muestra que existe una ganancia máxima en los intervalos $[-5,0]$ y mínima en el intervalo $[1,2]$.

Ejemplo 2: La ganancia total de $P(x)$ (en miles de dólares) por la venta de x unidades de medicamentos está dada por $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 72x$; en $(0 \leq x \leq 10)$

Grafica 2: La gráfica maestra donde se encuentra la ganancia máxima usando el Graficador wólffram.



La gráfica muestra que en el punto (5,300) esta el punto máximo de la gráfica lo que implica que al vender 5 unidades de medicamentos obtiene una ganancia máxima de 300 mil dólares

RESULTADOS

Al aplicar las metodologías descritas se encontró que el estudiante puede entender y analizar el Cálculo Diferencial cuando este se enseña con aplicaciones al mundo contemporáneo. En este caso las aplicaciones a la administración y la economía y el análisis hecho con el uso de los diferentes graficadores ayudaron a entender y analizar el resultado del problema. A su vez se encontró que el uso de la tecnología como fuente de ayuda en el proceso enseñanza aprendizaje resulta una herramienta efectiva en la medida que los ayude a desarrollar los niveles de pensamiento de memoria análisis y aplicación.

De igual manera, como resultado de dicha investigación se pudo crear un modelo curricular para la enseñanza del Cálculo Diferencial con el uso de la tecnología.

MODELO CURRICULAR

1ra. Diagnóstico de problemas y necesidades.

Para un mejor entendimiento del grupo de estudiantes que atenderá el profesor de matemáticas es importante tener un conocimiento real de las necesidades y problemas que tiene el estudiante en el área. El maestro debe obtener esta información con pruebas diagnósticas, verbalización de problemas para entender la profundidad del vocabulario que posee el estudiante. Ya que el vocabulario será una de las fuentes principales para entender la materia. Se enfrentará al estudiante todos los sistemas tecnológicos para el área de matemáticas. Estos serán wólfam latex calculadora gráfica. En este estudio se encontró que los estudiantes tenían poco dominio en el área de la tecnología y los nuevos sistemas

para resolver problemas de derivadas $\frac{dy}{dx}$, optimización (máxima y mínima),
 traficación $y = f(x)$ y antiderivadas $\int_a^b f(x)dx = ?$

Una vez obtenidos los resultados del conocimiento de los estudiantes en cada una de las herramientas tecnológicas se decidió determinar el nivel porcentual de conocimiento con su ejecución en el desarrollo del cálculo diferencial aplicado a la administración y la economía. Se enriqueció el vocabulario matemático de los estudiantes y se comenzó la etapa de aplicaciones que serían resueltas con los programas tecnológicos de wólfram, calculadoras gráficas latex labmath, geogebra geometry y computadoras gráficas.

Una vez obtenida la información se crearán los mini laboratorios donde se refuerza el proceso de enseñanza de los procesos tecnológicos y sus aplicaciones.

2da. Modelación del currículo

En la etapa de modelación del currículo estableceremos los temas y la herramienta tecnológica que mejor se aplica a cada uno de los temas. En los mismos temas se crearán unas tareas de laboratorio que serán aplicadas a las herramientas tecnológicas.

Tema	Herramienta tecnológica
Hallar el límite de una función	Calculadora gráfica y symbolab
Hallar los límites laterales	Wólfram calculadora gráfica y Látex
Límites al infinito en una función	Geoalgebra, symbolab y latex
Límites de funciones logarítmicas	Calculadora gráfica y Wolfram

La derivada

Derivadas de funciones Polinómicas	Calculadora y symbolab
Máximos y mínimos	Latex y calculadora
Graficación con el uso de derivadas	Symbolab, calculadora y latex
Aplicaciones de la derivada	Wólfram y symbolab
Aplicaciones económicas	symbolab

Aplicaciones a la administración	symbolab
Segunda derivada	Calculadora grafica
Derivadas de orden superior	Calculadora y symbolab

Integración

El integral	Symbolab, calculadora y Latex
La integración con intervalos	Symbolab y latex
Integración con logaritmos	Wólffram y geogebra
Aplicaciones del integral a la administración	Calculadora, symbolab, latex y geometry pack
Aplicación de la integral a la economía	Geometry pack, symbolab y latex

3ra. Estructuración curricular

En la estructuración curricular se establecerá el orden secuencial de los temas con tiempo para que el maestro pueda llevar el orden de tiempo y tarea en la enseñanza del cálculo diferencial.

El límite

Hallar el límite de una función	1.5 horas
Hallar los limites laterales	1.5 horas
Límites al infinito en una función	1.5 horas
Límites de funciones logarítmicas	1.5 horas

La derivada

Derivadas de funciones Polinómicas	1.5 horas
Máximos y mínimos	1.5 horas
Graficación con el uso de derivadas	2 horas
Aplicaciones de la derivada	2 horas
Aplicaciones económicas	2 horas
Aplicaciones a la administración	2 horas

Segunda derivada 1.5 horas
Derivadas de orden superior 1.5 horas

El integral

El integral	1.5 horas
La integración con intervalos	1.5 horas
Integración con logaritmos	1.5 horas
Aplicaciones del integral a la administración	2 horas
Aplicación de la integral a la economía	2 horas

En las áreas de aplicaciones a la administración y la economía, el profesor debe dedicar más tiempo pues las aplicaciones conllevan más tiempo en su ejecución y explicaciones.

4to. Organización para la puesta en práctica

Esta tarea consiste en prever todas las medidas para garantizar la puesta en práctica del proyecto curricular. Es determinante dentro de esta tarea la preparación de los sujetos que van a desarrollar el proyecto, en la comprensión de la concepción, en el dominio de los niveles superiores del diseño y del propio y en la creación de condiciones. Para que el profesor de cálculo pueda llevar a cabo este proyecto es importante que a través de pruebas diagnósticas en cuanto a la tecnología y al cálculo diferencial aplicado a la administración. Todo profesor debe comenzar por conocer qué tipo de estudiante tiene dentro del salón de clases. Se entiende que a través de un diagnostico se podría tener una gran idea del tipo de alumno. A su vez se comienza un proceso de ir llevando las aplicaciones de manera rutinaria conjuntamente con los métodos tecnológicos para poder resolverlos. El estudiante tiene que utilizar el método tecnológico para poder resolver y descubrir las fórmulas que lo ayudaran a resolver el mismo. Por obligación el alumno tiene que usar métodos tecnológicos que lo ayuden a enfrentarse a los problemas. Puede combinar estos métodos y herramientas

tecnológicas las cuales le darán una gran diversidad y enriquecimiento en el aprendizaje.

5ta. Diseño de la evaluación curricular.

Todo el curso será dividido en unidades las cuales tienen secciones de aplicación y tecnología integrada en su aprendizaje. Serán por una distribución de tiempo exacta que será evaluada por el maestro en el salón de clases. A su vez se impartirán una serie de procesos evaluativos de assessment en cada uno de los temas y al finalizar la unidad tendrán dos exámenes de evaluación uno de diseño computacional y otras aplicaciones con tecnología en cada unidad tendrán que utilizar lo antes aprendido y funcionará con un modelo espiral en el aprendizaje. El estudiante tendrá la oportunidad de auto evaluarse para mantener un constante aprendizaje en su desarrollo. De igual manera se espera que sirva para que el estudiante sea investigativo en sus aplicaciones y pueda desarrollar a su vez unos formatos los cuales aplicara en el mundo del trabajo en algún campo futuro.

El Estudio reveló que la tecnología, a pesar de ser una herramienta importante en el proceso enseñanza aprendizaje tiene que estar acompañada de una pregunta principal o búsqueda de un resultado para un mayor entendimiento del procedimiento. Al utilizar problemas de aplicación conduce a que la herramienta tecnológica realmente sea de ayuda. Pues es efectiva para descubrir y entender los procesos y aplicación de las fórmula y reglas del Cálculo Diferencial.

Una vez realizado y analizados los hallazgos del estudio se presentan las siguientes conclusiones las cuales ayudaran a enmarcar el objetivo principal y para aquellos que quieran continuar estudios en el Cálculo Diferencial.

- 1) La tecnología es una herramienta fundamental en la enseñanza del cálculo diferencial para que exista un aprendizaje efectivo en los estudiantes.

- 2) Para que el uso de la tecnología sea efectivo en el aprendizaje de los estudiantes tiene que estar acompañada de elementos de aplicaciones, que obliguen al estudiante a usarla para que de esta manera descubran nuevas formas su propio aprendizaje en el cálculo diferencial.
- 3) Es sumamente beneficioso el uso de diferentes elementos tecnológicos para el aprendizaje del cálculo diferencial aplicado a la administración y la economía, pues le ayuda tanto al maestro como al estudiante a poder comunicarse sobre el nuevo vocabulario en el área de aplicación.
- 4) El modelo curricular sirve como una guía donde el profesor y el estudiante pueden desarrollar otra metodología de estudio donde el análisis y la investigación sean la herramienta principal.
- 5) El profesor debe tener como guía planificadora el modelo del currículo y poder usar la tecnología en todo momento para que el estudiante pueda descubrir los teoremas y algoritmos algebraicos.
- 6) El sistema curricular de la enseñanza del cálculo diferencial debe estar acompañado de todas las herramientas tecnológicas enumeradas.
- 7) Poner en práctica el modelo curricular del uso de la tecnología en el cálculo diferencial aplicada a la administración y la economía el cual tiene los pasos metodológicos para ser implantado por los profesores en el plano individual o cualquier departamento de administración de empresas y economía. El mismo mejorara el proceso de entendimiento de dicha materia y renovara el proceso curricular de la materia del cálculo diferencial.

Objetivos Específicos:

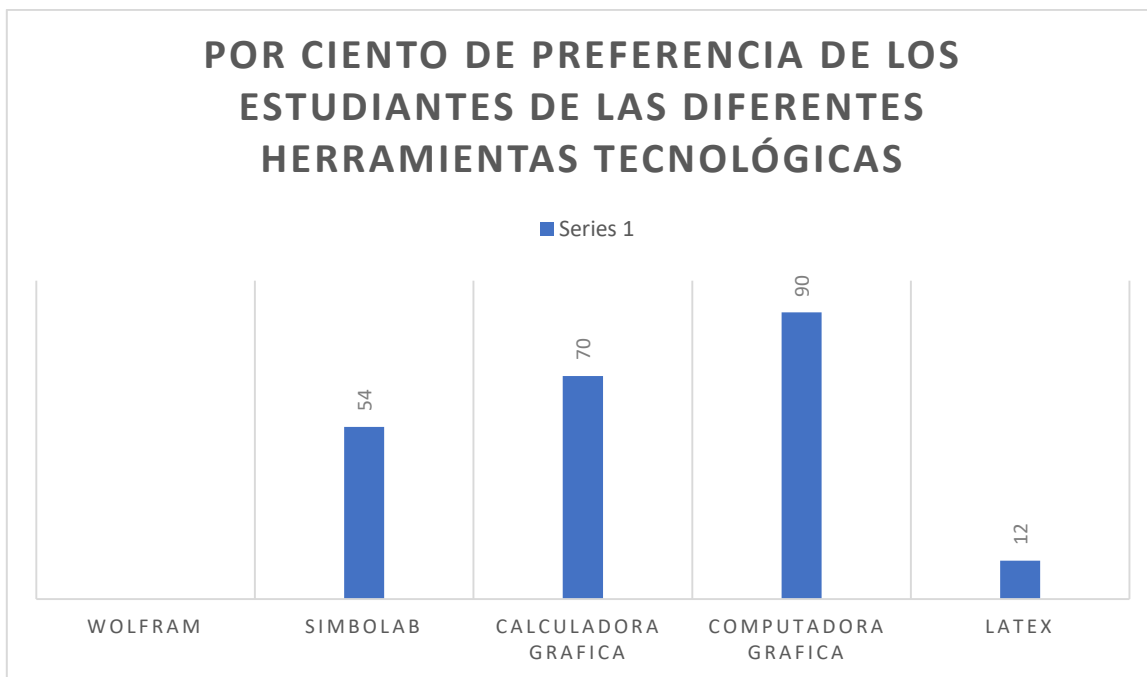
- 1) Crear un modelo curricular el cual ayude a los maestros a enseñar el cálculo diferencial de una manera activa y analítica donde se enfatice y se usa la herramienta principal de la tecnología para provocar el análisis crítico en los estudiantes.

2) Establecer una serie de actividades por temas donde se les recomienda al profesor la manera en que este debe enseñar el cálculo diferencial y las herramientas específicas que debe aplicar para cada uno de los temas.

Modelo para la enseñanza del cálculo diferencial con el uso de la tecnología.

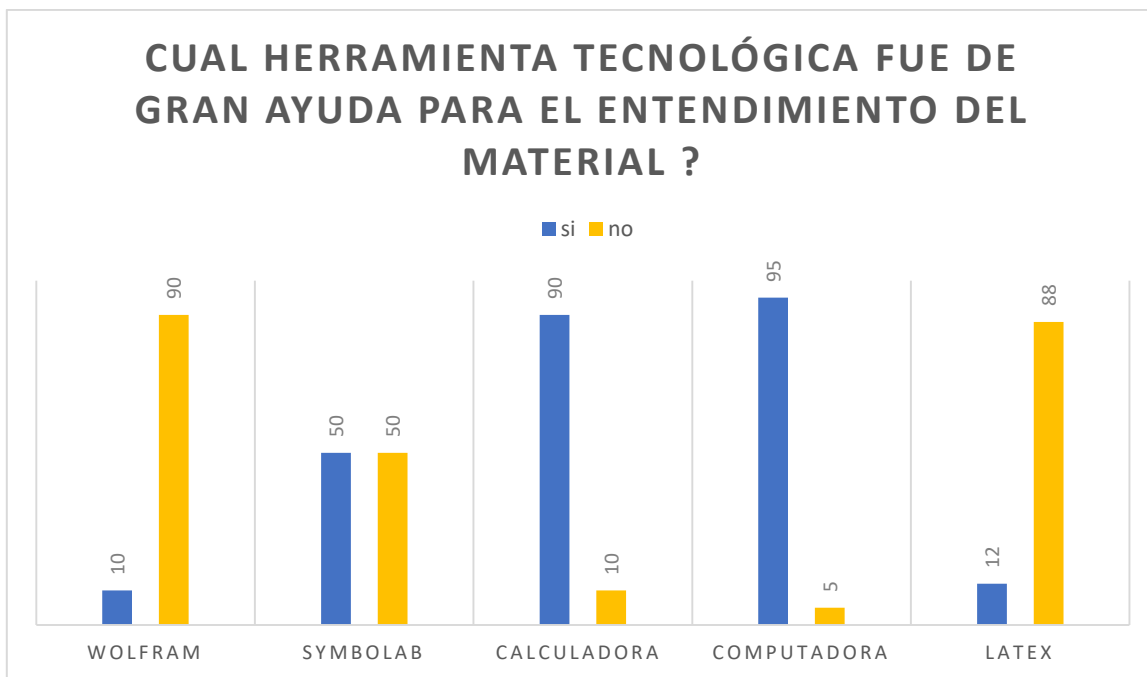
Temas		Aplicaciones
Tecnologías recomendadas		
límites	economía	administración
Wolfram, TI 89, Symbolab		
Derivadas	economía	administración
Wolfram, TI 89, Symbolab		
Graficación Máximos y mínimos	economía	administración
Wolfram, TI 89, Symbolab, Geogebra		
Integración	economía	administración
Wolfram, TI 89, Symbolab		

Gráfica 01: *Por ciento de preferencias de los estudiantes de las diferentes herramientas tecnológicas*



La gráfica 01 muestra las preferencias de los estudiantes hacia las diferentes herramientas tecnológicas. Un 54% prefiere symbolab, un 70% a calculadoras gráficas, un 90% a las computadoras gráficas y un 12% a la tecnología latex.

Gráfica 02: ¿Cuál herramienta tecnológica fue de gran ayuda para el entendimiento del material?



La gráfica 02 muestra el nivel porcentual de ayuda que tuvo las herramientas tecnológicas para los estudiantes en el color azul se marca el sí y en el color amarillo el no. Wólftram un 10% dijo entender con la herramienta wólftram un 90% dijo que no. En symbolab un 50% marco que si entendía y un 50% dijo que no. Con la calculadora un 905 dijo que si entendía y un 10% dijo que no. En computadora un 95% dijo que si y un 5% indicó que no. Con el uso de latex un 88% indicó que no y un 12% indicó que sí.

Gráfica 03: ¿Las aplicaciones a la administración y la economía te ayudaron a entender el cálculo diferencial?



La gráfica 03 recoge la opinión general si el uso de las herramientas tecnológicas les ayudó a los estudiantes a entender el cálculo diferencial. El color azul marca que un 90% indicó que la tecnología le ayudo a entender el cálculo diferencial y el color anaranjado marca que un 5% dijo que no y el color gris marca que un 5% dijo que bastante.

RESULTADOS

Al aplicar las metodologías descritas se encontró que el estudiante puede entender y analizar el Cálculo Diferencial cuando este se enseña con aplicaciones al mundo contemporáneo. En este caso las aplicaciones a la administración y la economía y el análisis hecho con el uso de los diferentes graficadores ayudaron a entender y analizar el resultado del problema. A su vez se encontró que el uso de

la tecnología como fuente de ayuda en el proceso enseñanza aprendizaje resulta una herramienta efectiva en la medida que los ayude a desarrollar los niveles de pensamiento de memoria análisis y aplicación.

De igual manera, como resultado de dicha investigación se pudo crear un modelo curricular para la enseñanza del Cálculo Diferencial con el uso de la tecnología

Beneficios de la tecnología en educación:

- **1. Colaboración:** animan a los estudiantes a expresarse y relacionarse con otros compañeros ya sea de cursos presenciales o virtuales, lo que permite aprender de forma interactiva y sin depender de encontrarse en un lugar determinado. Para llevar a cabo un trabajo académico, ya no es necesario que un grupo de estudiantes se reúnan personalmente para realizarlo, puesto que pueden **realizar trabajos colaborativos**.
- **2. Optimización del tiempo:** tanto los docentes como los estudiantes pueden reducir el tiempo en que realizan sus actividades, ya que pueden ser más eficientes. En caso de los académicos, estos puedan dedicar más tiempo a su propia formación, lo que a largo plazo no solo les beneficiará a ellos sino a sus alumnos.
- **3. Flexibilidad y capacidad de adaptación en el aprendizaje:** los estudiantes más aventajados pueden tener a su disposición contenidos adicionales y aquellos que necesiten un refuerzo, pueden recurrir a materiales de apoyo.
- **4. Mayor comunicación con los alumnos:** las tecnologías han fomentado la comunicación entre los docentes y los estudiantes mediante entornos virtuales de las asignaturas.
- **5. Reducción de costos:** el uso de las nuevas tecnologías en educación permite la reducción de costos. No es necesario material gráfico y todo se puede hacer a través de un programa.

- **6. Datos enriquecidos:** Se puede entregar una formación de mejor calidad a los estudiantes, ya que se pueden reunir más elementos y mostrar más miradas sobre una determinada materia.
- **7. Exploración:** Las nuevas tecnologías permiten que los estudiantes satisfagan su interés de conocimientos por áreas desconocidas para ellos, auto proporcionándose nuevos conocimientos.

CONCLUSIONES.

Los resultados obtenidos en la investigación demuestran que se dio respuesta a la interrogante principal de investigación ¿Cómo crear un modelo eficiente con el uso de la tecnología para la enseñanza del cálculo diferencial aplicado a la economía y la administración en el proceso de aprendizaje del estudiante en la Universidad de Puerto Rico, Recinto Rio Piedras? y se logró alcanzar el objetivo general de “Desarrollar un modelo con el uso de la tecnología para la enseñanza del cálculo diferencial aplicado a la administración y la economía en la Universidad de Puerto Rico, Recinto Rio Piedras”

El estudio demostró que el uso de la tecnología mejoró el proceso de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes que tomaban el curso de métodos cuantitativos. El 90% de estos señaló que el uso de la tecnología les ayudó a entender y poder aplicar el cálculo diferencial a la economía y la administración. Herramientas como la calculadora y la computadora en las gráficas y los métodos del máximo y mínimo fueron los porcentajes más altos en términos del entendimiento del estudiante sobrepasando en ambos casos el 85%. Una aplicación en términos del aprendizaje ayudó grandemente a que los estudiantes mediante la puesta en práctica de los conceptos como señala Dewey que se aprende haciendo. De igual manera como plantea Ausubel el aprendizaje por descubrimiento fue una herramienta pedagógica de gran ayuda para los estudiantes.

En el cálculo, la representación gráfica o visual juega un papel de suma importancia en la comprensión de conceptos y es ahí donde el uso de las nuevas

tecnologías en la enseñanza de dicha asignatura se percibe en primera instancia como una herramienta poderosa, debido a que con el uso de otros recursos materiales resulta muy complicado, por un lado, representar con lujo de detalle el comportamiento de funciones y por el otro, representar objetos matemáticos de tres dimensiones. Por otra parte, en Ortiz, Rico y Castro (2008) se menciona que el análisis curricular parte de una estructura teórica fundamentada en las cuatro dimensiones siguientes: conceptual, cognitiva, formativa y social y que dicha teoría considera que el conocimiento didáctico de los temas matemáticos debe fundamentarse en los sistemas de representación, la modelización, los errores y dificultades, la fenomenología, la historia de las matemáticas y los materiales y recursos. En este apartado, se trató entre otros elementos, de la importancia de los sistemas de representación y de los materiales y recursos; y es a nuestro modo de ver donde el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza del cálculo tiene sentido dentro del contexto del diseño de metodologías innovativas de enseñanza que repercutan en un aprendizaje efectivo en nuestros alumnos. La tecnología es vista como una poderosa herramienta para las representaciones porque apoyan la comunicación y el razonamiento, además de que ha logrado que la participación humana ya no sea requerida para la ejecución de un proceso de cálculo numérico o simbólico. Existen muchas investigaciones que nos muestran de manera contundente que los estudiantes de diferentes niveles educativos tienen una gran resistencia a utilizar diferentes representaciones que podrían ayudarlos tanto en la construcción de conocimiento matemático como en la resolución de problemas (Hitt, 2003), y es sabido por todos que una de las aplicaciones del cálculo es la resolución de problemas. Los artículos que sirvieron de marco para este estudio comprueban que actualmente el proceso de enseñanza y aprendizaje en la asignatura de Cálculo no es ajeno a los beneficios que traen consigo el diseño y aplicación de estrategias de enseñanza-aprendizaje con el uso de nuevas tecnologías.

El estudio reveló que la tecnología, a pesar de ser una herramienta importante en el proceso enseñanza aprendizaje tiene que estar acompañada de una

pregunta principal o búsqueda de un resultado para un mayor entendimiento del procedimiento. Al utilizar problemas de aplicación conduce a que la herramienta tecnológica realmente sea de ayuda. Pues es efectiva para descubrir y entender los procesos y aplicación de las fórmula y reglas del Cálculo Diferencial.

Igualmente la investigación demostró que el uso de la tecnología ayuda a entender los conceptos abstractos y comprender mejor las aplicaciones de la materia. Como señala Froudenthal cuando la matemática se enseña en contexto, el estudiante irá aprendiendo mejor los conceptos abstractos pues comienza viéndolos de forma concreta y puede ir desarrollando una manera de aprendizaje propio con la ayuda de diferentes fuentes tecnológicas. También se encontró que el estudiante prefiere utilizar los recursos tecnológicos para poder resolver las aplicaciones del cálculo diferencial. De esta manera al descubrir las fórmulas a través del uso de la tecnología permanecen más tiempo en su memoria y no las olvidan. De igual forma aprender aplicarlas al mundo del trabajo y crear nuevos métodos de solucionar problemas con la ayuda de herramientas tecnológicas.

Los profesores de cálculo compartimos lo anterior y es por eso que siempre hay que estar a la búsqueda de estrategias de enseñanza que motiven al alumno a profundizar su conocimiento, pues como dice Berry y Nyman (2003), la asignatura de cálculo requiere de una considerable profundidad de conocimientos teóricos y prácticos sobre los cuales construir sus ideas fundamentales y uno de los roles de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es apoyar el esfuerzo de los estudiantes en hacer conexiones entre nuevos conceptos y su conocimiento existente. Uno de los objetivos de la reforma de la educación en cálculo ha sido la habilidad de identificar y representar el mismo concepto en diferentes representaciones: numérica, gráfica y algebraica. Con la disponibilidad de la tecnología (calculadoras gráficas, equipo de registro de datos, ordenador, sistemas algebraicos computacionales), existe la oportunidad para liberar a los estudiantes de la monotonía de la manipulación algebraica y el cálculo numérico y de apoyar el aprendizaje de las ideas fundamentales (Berry y Nyman, 2003), así

como también, de que los estudiantes visualicen las diferentes representaciones mediante los CAS a través de las calculadoras gráficas, o bien, más fácilmente a través de los ordenadores.

Además, los profesores pueden beneficiarse mucho de los avances tecnológicos para hacer su trabajo más atractivo y para ser más eficientes. Muchas actividades de las que forman parte de su rutina diaria se pueden optimizar con la ayuda de aplicaciones y dispositivos informáticos, permitiendo que puedan dedicar más tiempo a su propia formación, lo que a largo plazo no solo les beneficiará a ellos sino a sus estudiantes. Otra de las ventajas del uso de la tecnología en la educación es su flexibilidad y capacidad de adaptación de cara a que los estudiantes puedan seguir ritmos distintos en su aprendizaje. Los estudiantes más aventajados pueden tener a su disposición contenidos adicionales y aquellos que necesiten un refuerzo, pueden recurrir a materiales de apoyo para reforzar aquello que aprenden en clases.

RECOMENDACIONES:

A la luz de los hallazgos y a las interrogantes de investigación se recomienda lo siguiente.

- Poner en práctica el modelo curricular del uso de la tecnología en el cálculo diferencial aplicada a la administración y la economía el cual tiene los pasos metodológicos para ser implantado por los profesores en el plano individual o cualquier departamento de administración de empresas y economía. El mismo mejorara el proceso de entendimiento de dicha materia y renovara el proceso curricular de la materia del cálculo diferencial.
- De la comparación entre las ideas que inspiran a todos aquellos que proponen la profundización de los estudios relativos a la tecnología, sobre todo en la educación secundaria, surge que los dos enfoques

principales, la corriente CTS que se aproxima a la problemática de la tecnología más desde las humanidades que desde las ciencias físicas y naturales o las técnicas, y la ET que llega a los aspectos ambientales y sociales de la tecnología proviniendo más de las técnicas, y, en ciertos enfoques, de su análisis antropológico, podrían combinarse en una síntesis superadora, con ventaja para ambos enfoques parciales y con plena ganancia para los alumnos, que de ese modo lograrían una visión más integral, a la vez que humanística y tecnológica de la tecnología en todos sus aspectos.

- Para que este modelo pudiese hacerse efectiva con ganancia para los alumnos y para la formación cultural tecnológica de las generaciones futuras, debería darse un debate en profundidad sobre los aspectos estudiados en estas páginas, y otro referido a los contenidos curriculares y a su transposición didáctica. Además del hecho de que este enfoque combinado requiere esfuerzos aún mayores de capacitación de los profesores, los docentes tendrán que ser, en esta disciplina más que en las tradicionales, los guías en un mundo poco conocido que deberán descubrir junto a sus alumnos, dejando tal vez de lado, en ese camino, numerosos preconceptos y prejuicios.

- El mundo evoluciona y la educación también, el modelo actual educativo- aprendizaje a través de libros y una pizarra con tizas ha finalizado. Hace varios años que la tecnología entró con fuerza para mejorar la educación y ahora ya es una parte vital de ella.

- Los niños y adolescentes de hoy en día son nativos digitales y no sería lógico apartarlo de su día a día en el mundo académico. El uso de la tecnología en la escuela hace incrementar el interés de los alumnos en

las actividades académicas y ayuda a desarrollar el aprendizaje de los niños.

- El acceso a Internet y a dispositivos tecnológicos (móviles, pizarras interactivas, recursos electrónicos, etc.) tanto en el aula de clase como fuera de ella ha dado un giro importante en la educación aportando distintos beneficios:

- **Facilita la comprensión.** El uso de herramientas tecnológicas motiva y hace que los estudiantes mantengan la atención más fácilmente. Consecuentemente, los contenidos se asimilan más rápido.

- **Autonomía.** Desarrollan el autoaprendizaje para formar personas autosuficientes capaces de resolver cualquier problema real. El uso de tecnologías propicia proponer estudios de casos y hacerles partícipes de la propia administración y gestión de los contenidos. Se trata de una metodología dónde se enseña a los alumnos a aprender a aprender, construir su propio conocimiento. Además, Internet permite infinidad de fuentes de información y propicia la habilidad de seleccionar y gestionar la más apropiada.

- **Trabajo en equipo.** La tecnología genera interacción entre los alumnos y favorece el trabajo en equipo. En el ámbito profesional la mayoría de los proyectos que se desarrollan son en equipo y requieren la colaboración de diferentes profesionales, desarrollar la capacidad de trabajo en equipo ya desde niños es fundamental.

- **Pensamiento crítico.** Internet y las redes sociales significan compartir puntos de vista y opiniones, debatir es muy importante cuando los cerebros se están desarrollando. Además, la enorme posibilidad que te da la tecnología de romper el paradigma espacio-tiempo, permite interconectar infinitas fuentes de conocimiento a nivel mundial, conectar con personas de otros países y culturas e intercambiar información.

- **Flexibilidad.** Los estudiantes pueden seguir ritmos distintos en su aprendizaje teniendo contenidos adicionales o materiales de apoyo dependiendo de las necesidades.
- La penetración de la tecnología en la educación no sólo aporta beneficios a los alumnos sino también a los profesionales. El uso de la tecnología ayuda a la optimización de las tareas de los profesores y hace su trabajo más atractivo, llegando a ser mucho más **eficientes**.
- Los niños y adolescentes han nacido con la tecnología y les gusta, debemos aprovechar este hecho para guiarlos a aprender a través de ella.

BIBLIOGRAFÍA

Abarca N. (2001). Docente carrera control de procesos. Tesis inédita Universidad de Bolivia

Azcarate C. y Camacho M. (2003). *Investigación en Didáctica del Análisis Matemático** Vol. X, No. 2. Venezuela

Ausubel. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo* .2° Trillas. México

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo Diferencial e Integral*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Catsigeras E., Curione K., Míguez M. (2006) El aprendizaje significativo del cálculo en la Universidad. Vol.(7) *Journal of science education*.

Camarena Gallardo, Patricia. (2013). "A treinta años de la teoría educativa, Matemáticas en el contexto de las ciencias". *Innovación Educativa*, 13 (62): 18 – 44.

Catsigeras, E. (2004). *Micro experiencia de enseñanza en Cálculo*. Publicado en las Actas del II Congreso de Enseñanza, ponencia 1-033 editado en CD– UEFI, Fac. de Ingeniería, Universidad de la República. Montevideo

Cautín, Gregory. (2015). *El número omega. Límites y enigmas de las matemáticas*. México: Tusquets Editores México.

Cuevas V., Carlos A. y Pluinage F. (2015). "*Una propuesta de ingeniería didáctica para la enseñanza de las matemáticas*". *El Cálculo y su enseñanza*, 6 (8): 167 - 190.

Cuevas C. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa*. México: Pearson.

Hitt, F. y Dufour, S. (2013). *Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada*. En:

Cuevas C. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa*. México: Pearson.

Dolores C. (2000). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal*. Capítulo. Sevilla, España. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F. pp. 155-181.

Imaz J. y Moreno A., L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo*. México: Trillas. OEI.

Rojas A. (2012). *Un enfoque para la enseñanza del cálculo diferencial e integral*. Tesis Universidad Americana de Acapulco,

Ruiz E. (2012). *Uso de la Tecnología Como Apoyo en el Aprendizaje de Cálculo*. Cibernética e informática. (9) núm. 2.

Ruiz E.F. (2010). *Estrategias Didácticas en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en Ingeniería*, Reporte técnico de proyecto proyectos de investigación

registrado en la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP), del IPN con núm. de registro CGPI, México

Sabogal G., Monroy N., Landero J., Molina R. (2013). *Cálculo diferencial: aprendiendo con nuevas tecnologías*. Afiliación Institucional de los autores: Universidad El Bosque, Bogotá, Colombia. Los autores declaran que no tienen conflicto de interés

Research Article

TAU e-Journal of Multidisciplinary Research

<http://tauniversity.org/journal/tau-journal-multidisciplinary-research>

Trabajo de investigación desarrollado en el marco del

Post-doctoral Program in Mathematics (2017), Tecana American University, of the USA.

Recibido el: 27 de Junio de 2017

Aprobado el: 30 de Octubre de 2017

Vol.: 9

Nro.: 4
